xI22x

ÉCOLE SPÉCIALE DES TRAVAUX PUBLICS, DU BATIMENT ET DE L'INDUSTRIE

CONCOURS COMMUN D'ADMISSION
AUX ÉCOLES SUPÉRIEURES
DES TRAVAUX PUBLICS
DU BATIMENT
DE MÉCANIQUE-ÉLECTRICITÉ
DE TOPOGRAPHIE

SESSION 1977

1ère INTERROGATION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

NOTA — *Les six questions sont totalement indépendantes et peuvent être traitées dans un ordre arbitraire, sous réserve d'indiquer très lisiblement leur numéro.*

Sujet n° 1

On considère l'intégrale

$$I_n(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x \, dx}{(x^2 + a^2)^n} \qquad n \in \mathbb{N}^*, \ a \in \mathbb{R}_+^*$$

On supposera que $I_1(a) = \frac{\pi}{2 a e^a}$

1° Déterminer une relation entre $I_{n+1}(a)$ et $\frac{d I_n(a)}{da}$ (On justifiera la dérivation).
Calculer I_2 et I_3.

2° Établir une relation de récurrence entre I_n, I_{n+1} et I_{n+2}. Retrouver alors I_3.

3° Trouver une équation différentielle linéaire du second ordre vérifiée par $I_n(a)$.

Sujet n° 2

1° On considère le champ de vecteurs $\vec{V}(x, y, z)$

$$\begin{aligned} X &= yz \\ Y &= z\,f(x) + h(x) \\ Z &= y\,g(x) + h(x) \end{aligned}$$

où f, g et h sont des fonctions à dérivée continue.

a) Comment choisir ces fonctions pour que $\vec{V}$ soit un gradient ? De quel potentiel scalaire $U(x, y, z)$ dérive-t-il alors ?

b) Calculer la circulation de $\vec{V}$ le long de la courbe.

$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t \quad (0 \leqslant t \leqslant \pi)$

.../...

2° On considère le champ de vecteurs $\vec{V}(x, y, z)$

$$X = (z^2 - y^2)\ \varphi(x)$$
$$Y = y\ [\psi(x) - z^2]$$
$$Z = z\ [y^2 - x\,\varphi(x)]$$

où φ et ψ sont des fonctions à dérivée continue.

a) Comment choisir ces fonctions pour que $\vec{V}$ dérive d'un potentiel-vecteur ? Donner un exemple $\vec{W}$ d'un tel potentiel-vecteur ?

b) Dans le cas où $\varphi^2 = \psi$ calculer le flux du vecteur $\vec{V}$ à travers la portion de surface limitée par la courbe Γ d'équations :

$$x = 2 + \cos t\,, \quad y = 2 - \sin t\,, \quad z = \frac{1}{(2 + \cos t)(2 - \sin t)} \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

Sujet n° 3

1° Résoudre l'équation différentielle

(E) $\quad y - ax^2 y'' = 0 \quad (a \neq 0)$

(On pourra effectuer un changement de variable simple afin de transformer (E) en une équation linéaire à coefficients constants).
Pour quelles valeurs de a la solution générale est-elle une fonction rationnelle de x ?

2° *a)* Déterminer les polynômes $P(x)$ de degré 4 qui sont divisibles par leur dérivée seconde

$$P(x) = P''(x)\ Q(x) \quad (1)$$

Calculer $Q(x)$

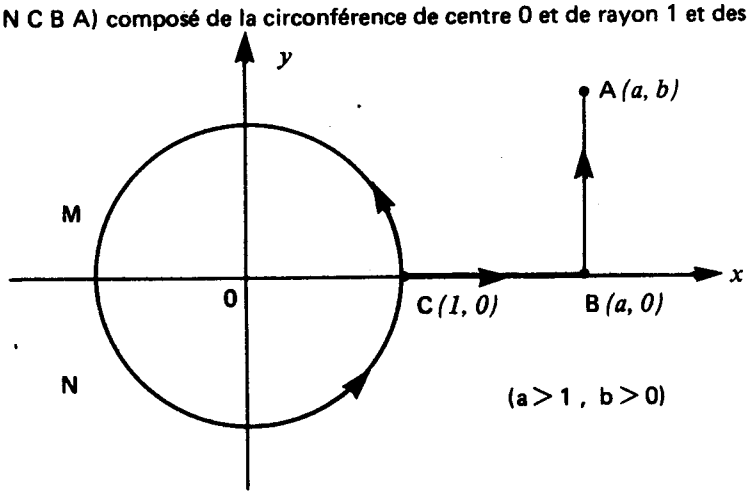
b) Résoudre l'équation différentielle $y - Q(x)\,y'' = 0$ dans le cas où $P(x)$ est de la forme $x^4 + ax + b$, a et b à déterminer sachant que $P(x)$ vérifie (1).

Sujet n° 4

Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_{(\Gamma)} \frac{[x \operatorname{Log}(x^2 + y^2) - x^2 y]\,dx + [y \operatorname{Log}(x^2 + y^2) + x^3]\,dy}{(x^2 + y^2)^2}$$

le long du chemin (Γ) = (C M N C B A) composé de la circonférence de centre 0 et de rayon 1 et des segments CB et BA.



Sujet n° 5

Résoudre le système

$$x'(t) = \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{2}\right)x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}u$$

$$y'(t) = -\frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{2}\right)y + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}u$$

$$z'(t) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{2}\right)z + \frac{1}{2}u$$

$$u'(t) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z + \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{2}\right)u$$

[on pourra écrire le système sous la forme $X' = \left(A + \frac{I}{1+t}\right)X$]

Sujet n° 6

Soit E un espace topologique et A une partie de E.

On pose : $\alpha(A) = \overset{\circ}{\overline{A}}$ et $\beta(A) = \overline{\overset{\circ}{A}}$

($\overset{\circ}{X}$ est l'intérieur de X, $\overline{X}$ l'adhérence de X .)

1° Montrer que si A est un ouvert on a $A \subset \alpha(A)$
et si A est un fermé $\beta(A) \subset A$

2° Montrer que pour tout A on a $\alpha[\alpha(A)] = \alpha(A)$ et $\beta[\beta(A)] = \beta(A)$

3° Donner un exemple simple (de la droite numérique $\mathbb{R}$ si l'on veut) où les ensembles suivants sont tous distincts
A, $\overset{\circ}{A}$, $\overline{A}$, $\alpha(A)$, $\beta(A)$, $\beta(\overline{A})$, $\alpha(\overset{\circ}{A})$.

4° A et B étant deux parties de E montrer que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

Donner un exemple simple où $A \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$ sont distincts et un autre où, A n'étant pas un ouvert, $A \cap \overline{B}$ n'est pas contenu dans $\overline{A \cap B}$.

---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail